

Gliwice, 21.07.23. r.

Dr hab. inż. Grzegorz Działkiewicz, prof. Pol. Śl.

Katedra Mechaniki i Inżynierii Obliczeniowej

Wydział Mechaniczny Technologiczny

Politechnika Śląska

### Recenzja

rozprawy doktorskiej mgr inż. Jordana Podgórskiego

pt.: "Metody radialnych funkcji bazowych w zastosowaniu do zagadnień  
brzegowych mechaniki z pewnym typem nieciągłości"

Promotor: dr hab. inż. Artur Krowiak, prof. PK

Podstawa opracowania: pismo nr M.00-81/2023

Prodziekana Wydziału Mechanicznego Politechniki Krakowskiej

prof. dra hab. inż. Marka Stanisława Kozienia

### 1. Ogólna charakterystyka pracy

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska liczy 100 stron, składając się z: sześciu rozdziałów głównych, bibliografii oraz streszczeń w językach polskim i angielskim. Praca została napisana w języku polskim. Poniżej przedstawiono zakres tematyki poruszanej w poszczególnych rozdziałach pracy.

Praca rozpoczyna się podziękowaniami Autora, umieszczonymi po stronie tytułowej, oraz spisem treści.

Rozdział 1 pokazuje aktualny stan wiedzy dotyczącej problematyki rozprawy, zaprezentowany na podstawie przeglądu literatury. Autor skupia się na bezsiatkowych metodach rozwiązywania zadań brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych, w szczególności opisujących zagadnienia mechaniki. Omawia ich zalety i wady oraz aktualne zastosowania, wskazując, w zasadzie, lukę w literaturze przedmiotu, która dotyczy zastosowania metody Kansy i jej uogólnień do rozwiązywania zadań brzegowych z nieciągłymi współczynnikami występującymi w równaniach konstytutywnych, co ma zastosowanie w opisie zadań dla obszarów niejednorodnych, w szczególności tych, dla których występuje brzeg wspólny dla podobszarów składowych rozważanego obszaru, nazywany w pracy interfejsem. Na

koniec tego rozdziału Autor w sposób niejawni formułuje cel pracy oraz omawia jej strukturę.

Rozdział 2 w sposób jawny formułuje cel rozprawy oraz jej tezę, pokazując również zakres wykonanych badań.

Rozdział 3 zawiera podstawowe informacje dotyczące metod bezsiatkowych, opartych o globalną interpolację za pomocą radialnych funkcji bazowych. W szczególności omówiono klasyczną i uogólnioną metodę Kansa i niezwykle istotny problem badawczy wyznaczania współczynnika kształtu radialnych funkcji bazowych, celem zapewnienia dokładności i stabilności procesu obliczeniowego. Autor pokazuje w tym rozdziale również wyniki własnych badań związanych z konstrukcją algorytmów wyznaczania quasi-optimalnych wartości współczynnika kształtu radialnych funkcji bazowych dla danego zadania brzegowego.

Rozdział 4 pokazuje sformułowanie, implementację oraz zastosowanie metod kolokacyjnych z radialnymi funkcjami bazowymi do rozwiązywania zadań brzegowych dla obszarów przedziałami niejednorodnych, dla których występuje brzeg wspólny. W pierwszej części rozdziału Autor wprowadza i omawia klasyczne podejście oparte o zastosowanie metody kolokacji dla każdego z podobszarów składowych wraz z tzw. warunkami ciągłości na brzegu wspólnym dla każdej pary podobszarów. W drugiej części rozdziału Autor omawia własną metodę, która stosuje tzw. funkcje skalujące do modelowania nieciągłości w rozważanych modelach matematycznych. Rozdział kończą wnioski z przeprowadzonych testów numerycznych.

Rozdział 5 zawiera przykłady zastosowania opracowanych metod i algorytmów do rozwiązywania wybranych zadań mechaniki. Pokazano rozwiązania eliptycznych problemów brzegowych dla przepływu ciepła oraz dla płaskiego stanu naprężenia, a także rozwiązanie problemu własnego dla niejednorodnej membrany.

Rozdział 6 omawia wnioski dotyczące przedstawionych w rozprawie wyników badań, a także formułuje kierunki dalszych badań.

Bibliografia zawiera 60 źródeł, w większości aktualnych pozycji naukowych.

Podsumowując analizę struktury i zawartości rozprawy stwierdzam, że zarówno temat, jak i kompozycja rozprawy w prawidłowy sposób opisują rozważany problem naukowy, który można sklasyfikować jako zagadnienie mechaniki obliczeniowej o potencjalnych różnorodnych zastosowaniach. Recenzowaną rozprawę można, bez wątpliwości, zaliczyć do dyscypliny naukowej Inżynieria Mechaniczna. Treść pracy odpowiada tytułowi, jej struktura jest poprawna i właściwa dla tekstów naukowo-technicznych. Strona redakcyjna nie budzi większych zastrzeżeń, styl dobry, szata graficzna oddaje treść, zastosowano prawidłowe metody wizualizacji danych, a także prawidłowe odwołania do źródeł bibliograficznych, forma zwarta bez redundancji w tekście. Liczba źródeł mogłaby zostać znacznie powiększona, w tym o najnowsze pozycje literatury światowej, ale jest wystarczająca. Nawiązując jeszcze do struktury pracy, można zauważyć, że rozdział 2 jest bardzo krótki i mógłby być włączony do rozdziału 1. Generalnie, stwierdzam że Autor przedstawił do oceny dzieło o oryginalnym charakterze naukowym, spełniające wszystkie wymagania stawiane tego rodzaju dokumentom.

## 2. Ocena tematu, zakresu i celu rozprawy

Temat recenzowanej rozprawy wpisuje się w aktualną tematykę wielo- i interdyscyplinarnych badań naukowych, prowadzonych we wiodących ośrodkach naukowych w Polsce i na świecie, w szczególności związanych z dyscypliną naukową klasyfikowaną w naszym kraju jako Inżynieria Mechaniczna. Zakres rozprawy mógłby być rozszerzony, ale dotyczy złożonego i trudnego zagadnienia, więc uważam że przedstawione wyniki badań są interesujące i całkowicie wystarczające w kontekście pracy doktorskiej. Cel rozprawy sformułowano prawidłowo, a treść pracy pokazuje, że został osiągnięty.

## 3. Ocena rozprawy

Przedstawiona do recenzji praca jest interesującym i istotnym wkładem w rozwój dyscypliny Inżynieria Mechaniczna. Pokazuje wartościowy opis rezultatów procesu badawczego wraz z przedstawionym podejściem metodycznym obejmującym większą część współczesnego paradygmatu naukowego stosowanego w naukach technicznych, tj. teorii, empirii oraz modelowania i symulacji komputerowych.

W pracy widoczne są wszystkie elementy procesu badawczego, prowadzonego zgodnie z metodą naukową, realizowanego w sposób dojrzały, samodzielny i twórczy. Ponadto, jak wspomniano wcześniej, praca ma duży potencjał użytkowy i wynikające z niej wnioski mogą zostać wykorzystane do dalszego rozwoju metod obliczeniowych i technik symulacyjnych w zakresie modelowania nie tylko w mechanice, ale również w termomechanice i mikromechanice.

Do podstawowych zalet rozprawy zaliczam:

- a) ciekawą, istotną oraz złożoną tematykę rozprawy odnoszącą się do metod obliczeniowych rozwiązywania eliptycznych zadań brzegowych dla obszarów o zmiennych w sposób skokowy własnościach fizycznych, reprezentowanych przez modele z brzegiem wspólnym, determinującym rozwiązania nieciągłe lub niegładkie;
- b) połączenie procesu modelowania matematycznego, głównie dotyczące sformułowania kolokacyjnych metod obliczeniowych oraz symulacji numerycznych za pomocą opracowanych metod i algorytmów;
- c) dojrzały proces weryfikacji i weryfikacji wyników badań symulacyjnych;
- d) dobre uzasadnienie wyboru tematu rozprawy z naukowego punktu widzenia;
- e) opracowanie metody uwzględniania nieciągłości współczynników równań modelu matematycznego rozważanych zagadnień w postaci tzw. funkcji skalującej wraz z jej implementacją;
- f) opracowanie i zastosowanie metody wyznaczania quasi-optymalnych wartości parametru kształtu radialnych funkcji bazowych na podstawie przebiegu wskaźnika uwarunkowania macierzy głównej układu.

Poniżej przedstawiam pewne uwagi krytyczne, które nie mają na celu umniejszenie ogólnej dobrej oceny pracy. Mają one charakter dyskusyjny, wyjaśniający, porządkujący lub być może umożliwiłyby podniesienie jej jakości, a także mogą wskazać dalsze kierunki badań.

W trakcie analizy tekstu pracy moją uwagę zwróciły pewne sformułowania zastosowane przez Autora, dlatego najpierw przedstawiam uwagi związane z terminologią naukową stosowaną w pracy:

1. W pracy pojawia się termin „interfejs”, który jest zrozumiały i doskonale rozumiem intencje Autora, prawdopodobnie związane z zastosowaniem zwięzłości języka angielskiego, z którego pochodzi ta kalka językowa. Dodatkowo, w języku polskim literatura przedmiotu nie jest zbyt obszerna, co również uprawnia stosowanie tego terminu. Jednak termin ten, raczej jest powszechnie przyjęty w informatyce, niż w inżynierii mechanicznej, gdzie można spotkać takie określenia jak: brzeg wspólny podobszarów, styk, granica podobszarów. Jak Autor widzi możliwości wprowadzenia tego typu określeń w polskiej literaturze naukowej dotyczącej rozważanych w Jego rozprawie zagadnień?
2. W rozdziale 3, np. w Tabeli 3.1 pojawiają się takie określenia radialnych funkcji bazowych, jak „wielokwadratowa” i „odwrotna wielokwadratowa”. Wydaje się, że są to nieprecyzyjne tłumaczenia angielskich odpowiedników „multiquadric” i „inverse multiquadric”. W języku polskim istnieje w geometrii analitycznej pojęcie kwadryki, jako powierzchni II stopnia w przestrzeni  $R^3$ . Wtedy termin „multiquadric” można spróbować przetłumaczyć jako wielokwadryka, co byłoby zgodne z własnościami tych radialnych funkcji bazowych, jako uogólnień powierzchni II stopnia dla  $R^n$ .
3. Podrozdział 5.3 zatytułowany „Drgania własne powłoki z interfejsem” w istocie dotyczy zadania własnego dla membrany. Chciałbym zauważyć, że termin „powłoka” zostaje później, w tekście podrozdziału, zastąpiony prawidłowo przez Autora terminem „membrana”. W t. VIII serii „Mechanika Techniczna” pod tytułem „Mechanika sprężystych płyt i powłok”, wydanym pod red. Prof. Czesława Woźniaka znajduje się definicja, cyt.: „Jeżeli powierzchnia podstawowa jeszcze przed odkształceniem jest zakrzywiona, to mamy do czynienia z *powłoką*.”. Z treści podrozdziału 5.3 wynika, że powierzchnia podstawowa rozważanego obiektu nie jest zakrzywiona, stąd nie powinno stosować się terminu „powłoka”.
4. Podobnie, w podrozdziale 5.4 zatytułowanym „Płaski stan naprężeń kwadratowej płyty złożonej z dwóch różnych materiałów”, można na Rys. 5.12 zobaczyć tarczę, jako element dwuwymiarowy obciążony w płaszczyźnie środkowej. Mimo, że płaskiemu stanowi naprężenia mogą towarzyszyć odkształcenia w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny obciążenia, to zwyczajowo w polskiej literaturze, taki ustrój nazywa się tarczą.

Poniżej przedstawiam uwagi merytoryczne, które mogą prowadzić do dyskusji naukowej:

1. Praktycznie wszystkie zaprezentowane w pracy przykłady numeryczne zawierają warunki brzegowe Dirichleta, jedynie podrozdział 5.4 pokazuje zadanie z mieszanymi przemieszczeniowo-naprężeniowymi warunkami brzegowymi, co dodatkowo skutkuje zaobserwowaną mniejszą dokładnością otrzymanych rezultatów. Uprzejmie proszę o dyskusję dotycząc wpływu typu

- warunków brzegowych Neumanna i Robina, w szczególności niejednorodnych, na dokładność rozwiązań w ramach opracowanych metod.
2. Wprowadzona przez Autora koncepcja funkcji skalującej jest bliska koncepcji metody wykorzystującej warstwice (ang. level-set method). Uprzejmie proszę o wskazanie możliwych powiązań między tymi dwiema koncepcjami w kontekście zastosowań nie tylko w rozwiązywaniu eliptycznych zadań brzegowych, ale również dla problemów optymalizacji tego typu zadań. Podejście oparte o metodę warstwic było już stosowane, np. przez prof. Kanę do modelowania propagacji frontu płomienia w płynie. Proszę również o nawiązanie do dalszych kierunków badań, sformułowanych w pracy, w szczególności odnoszących się do zagadnień brzegowo-początkowych, również z propagacją powierzchni nieciągłości.
  3. Nieciągłość rozwiązań równań mechaniki występuje często dla przypadków istnienia wewnątrz rozważanego obszaru takich defektów (mikro)struktury jak pęknięcia, sztywne włókna, dyslokacje i inne. Uprzejmie proszę o dyskusję dotyczącą potencjalnych zastosowań opracowanych metod i algorytmów do modelowania pól odkształceń i naprężeń w mechanice pękania oraz mikromechanice. Dodatkowo, równania o nieciągłych współczynnikach w naturalny sposób modelują obszary niejednorodne o przedziałowo stałych (jednorodnych) własnościach fizycznych, co może stanowić modele materiałów kompozytowych. Proszę o dyskusję również w tym zakresie potencjalnych zastosowań opracowanych metod.
  4. W nawiązaniu do pkt. nr 3 proszę o dyskusję dot. możliwości zastosowania opracowanych metod do analizy punktów osobliwych, np. trójstyku podobszarów. Zadania takie są istotne z punktu widzenia zastosowań geomechaniki, gdzie istnieje potrzeba modelowania takich ośrodków jak skały, które cechują się skokową niejednorodnością struktury i anizotropią własności fizycznych.
  5. W przedstawionych przykładach stosowano jednorodne warunki ciągłości. Z punktu widzenia zastosowań, ważny jest przypadek niejednorodnego warunku ciągłości dla strumienia, wyrażany przez tzw. warunek brzegowy IV rodzaju, co w termomechanice ma interpretację uwzględnienia w modelu tzw. oporu cieplnego styku. Czy były przeprowadzane tego rodzaju analizy, a jeśli tak, to jaka była efektywność zastosowanego podejścia z funkcją skalującą?
  6. Uprzejmie proszę o dyskusję dotyczącą porównania efektywności opracowanej metody funkcji skalującej z podejściem wykorzystującym aproksymację uogólnionych dystrybucji Heaviside'a do modelowania skokowo zmiennych parametrów fizycznych w obszarach niejednorodnych.
  7. Jaką metodą numeryczną wyznaczono wartości własne dla problemu drgań własnych membrany z rodz. 5.3? Jaka była dokładność wyników dla postaci drgań własnych, w szczególności w porównaniu do dokładności wyników wartości własnych?
  8. Czy Autor uważa, że opracowane metody są konkurencyjne w stosunku do ogólnie znanych metod siatkowych, takich jak metoda elementów skończonych i metoda elementów brzegowych? Jeśli tak, to jakie cechy przyczyniają się do preferencji metod bezsiatkowych podczas wyboru metody modelowania?
  9. Podczas wyznaczania quasi-optymalnych wartości współczynnika kształtu radialnych funkcji bazowych wykorzystywano wartości wskaźnika uwarunkowania macierzy głównej układu równań algebraicznych liniowych metody. Jaką metodą wyznaczano ten wskaźnik? Czy zastosowanie rozkładu wg wartości osobliwych było sprzężone z procedurą regularyzacji, np.

związanej z obciążeniem widma wartości osobliwych, podczas wyznaczenia rozwiązania w sensie najmniejszych kwadratów?

Poniżej przedstawiono również uwagi o charakterze redakcyjnym:

1. W wielu miejscach w rozdziale 3 można zauważyć niejednorodny rozkład wielkości spacji w tekście pracy, nie jest to specjalnie ważna uwaga, ale może wpływać na jakość odbioru pracy, podczas uważnej lektury.
2. Wiele rysunków, np. 3.1, 3.2, 3.3 i innych jak 4.8-4.16, jest niewielkich rozmiarów, co utrudnia percepcję wizualizowanych wielkości.
3. W równaniu (5.20) oznaczono przez  $P_x$  i  $P_y$  składowe sił masowych, przy czym oznaczenie  $P$  występuje również w równaniu (5.21), gdzie sformułowano warunki brzegowe, w szczególności dla sił powierzchniowych. Zalecam, rozróżnienie oznaczenia tych różnych wielkości, tj. sił masowych i sił powierzchniowych.

Myślę, że rozważania nad przedstawionymi uwagami mogą przyczynić się do podniesienia, i tak dobrej jakości recenzowanej pracy.

#### 4. Wniosek końcowy

Praca doktorska autorstwa mgra inż. Jordana Podgórskiego, jej zawartość i forma wskazuje na wiedzę i umiejętności Autora w zakresie metod obliczeniowych mechaniki, numerycznej algebry liniowej, programowania obliczeń naukowych, weryfikacji i walidacji wyników symulacji komputerowych, oraz zastosowań metod obliczeniowych w inżynierii mechanicznej. Sposób realizacji pracy wskazuje na dużą wiedzę ogólną, co podkreśla tematyka rozprawy, a także umiejętności praktyczne w dyscyplinie naukowej „Inżynieria mechaniczna”. Autor rozprawy doktorskiej podjął się bardzo trudnego i ambitnego zadania, które dostarcza ważnych i przydatnych wniosków w zakresie metod obliczeniowych mechaniki.

Należy podkreślić, że z tak trudnego zadania Doktorant wywiązał się w sposób co najmniej dobry. Wykazał się umiejętnością prowadzenia złożonych obliczeń naukowych w oparciu o współczesne metody obliczeniowe oraz adekwatnym formułowaniem problemów naukowych. Metodę formułowania modeli oraz realizację obliczeń, uważam za właściwą, a uzyskane wyniki za wartościowe. Wnioski wynikające z realizacji przyjętego zakresu badań mają dużą wartość poznawczą i użyteczną. Z przekonaniem stwierdzam, że zasadnicze cele pracy zostały osiągnięte. Podsumowując wyrażam opinię, że:

- a) Rozprawa doktorska mgra inż. Jordana Podgórskiego spełnia wymagania art. 13 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, poz. 595, stan prawny na dzień 30 września 2011 r.) i w związku z art. 179 ust. 1 ustawy z dnia 3 lipca 2018 r. Przepisy wprowadzające ustawę — Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1669 z późn. zm.) i wnoszę o dopuszczenie jej do publicznej obrony.
- b) Zakres rozważań rozprawy kwalifikuje ją do dziedziny nauk inżynieryjno-technicznych w dyscyplinie Inżynieria Mechaniczna według aktualnej klasyfikacji dziedzin i dyscyplin określonej w rozporządzeniu z dnia 20 września 2018 r. (Dz. U. z 2018 r. poz. 1818).

